Jakub Juránek, UČO 393110
skupina č.08

Úloha č. 5 - Měření modulu pružnosti pevných látek

1 Teorie

1.1 Modul pružnosti v tahu

Normálové napětí pro kolmou sílu F_n rovnoměrně rozloženou na plochu S je dáno vztahem $\sigma_n = \frac{F_n}{S}$.
Relativní prodloužení ϵ je dáno jako podíl změny délky k původní délce, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$.
Při elastické deformaci platí Hookův zákon:

$$\varepsilon \cdot E = \sigma_n$$

kde E je modul pružnosti v tahu, který je materiálovou konstantou.
Modul pružnosti v tahu můžeme měřit přímo z délkového protažení drátu. Při něm platí vztah:

$$\Delta l = \frac{4gl}{\pi d^2 E} m$$

kde g je tíhové zrychlení, Δl protažení drátu při zátěži m, l jeho původní délka a d jeho průměr.
Označíme-li $k = \frac{4gl}{\pi d^2 E}$, dostaneme, že je prodloužení je přímo úměrné zavěšené hmotnosti s konstantou přímé úměrnosti k, tedy $\Delta l = k \cdot m$.
Přičemž prodloužení při dané zátěži můžeme změřit a určit tak konstantu k, ze které pak můžeme určit modul pružnosti E jako

$$E = \frac{4gl}{\pi d^2 k}$$

Ze zákona šíření nejistot pak dostáváme:

$$r(E) = \sqrt{r(l)^2 + 4r(d)^2 + r(k)^2} = \sqrt{r(l)^2 + 4r(d)^2 + r(\Delta l)^2 + r(m)^2}$$

Modul pružnosti v tahu můžeme taktéž měřit z průhybu nosníku. Při něm platí vztah:

$$y = \frac{gl^3}{4a^3bE} m$$

kde g je tíhové zrychlení, l je vzdálenost podpěr, y průhyb nosníku při zátěži m, a jeho tloušťka a b jeho šířka.
Označíme-li $k = \frac{gl^3}{4a^3bE}$ dostaneme, že průhyb je přímo úměrný zavěšené hmotnosti s konstantou přímé úměrnosti k, tedy $y = k \cdot m$.
Přičemž průhyb při dané zátěži můžeme změřit a určit tak konstantu k, ze které pak můžeme určit modul pružnosti E jako

$$E = \frac{gl^3}{4a^3bk}$$

Ze zákona šíření nejistot pak dostáváme:

$$r(E) = \sqrt{9r(l)^2 + 9r(a)^2 + r(b)^2 + r(k)^2} = \sqrt{9r(l)^2 + 9r(a)^2 + r(b)^2 + r(y)^2 + r(m)^2}$$

1.2 Modul pružnosti ve smyku

Smykové napětí pro tečnou sílu F_t rovnoměrně rozloženou na plochu S je dáno vztahem $\sigma_t = \frac{F_t}{S}$.
Relativní deformace γ je dána jako podíl posunutí Δ okrajových částí vrstvy k její tloušce a, $\gamma = \frac{\Delta}{a}$.
Hookův zákon:

$$\gamma \cdot G = \sigma_t$$

kde G je modul pružnosti ve smyku, který je materiálovou konstantou.
Modul pružnosti ve smyku můžeme měřit dynamickou metodou pomocí torzního oscilátoru. Což je zařízení, kterým měříme modul pružnosti ve smyku tak, že na měřený drát zavěsíme těžkou kouli a měříme periodu jejích torzních kmitů. Při něm platí vztah:

$$G = \frac{64\pi m D^2 l}{5 d^4 T^2}$$

kde m je hmotnost zavěšené koule, D její průměr, l délka měřeného drátu, d jeho průměr a T perioda torzních kmitů oscilátoru.
Ze zákona šíření nejistot pak dostáváme:

$$r(G) = \sqrt{r(m)^2 + 4r(D)^2 + r(l)^2 + 16r(d)^2 + 4r(T)^2}$$

2 Postup měření

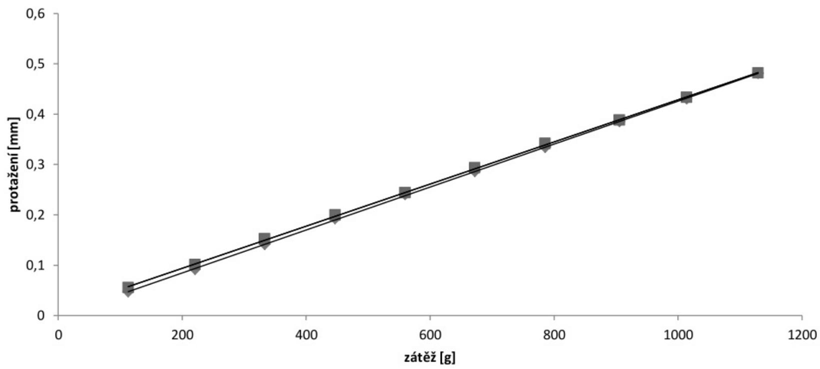
Měření probíhalo za těchto podmínek:
teplota . . . $25,2$ °C
tlak . . . $98,2$ kPa
vlhkost . . . 48 %

2.1 Protažení drátu

Nejprve změříme délku napnutého drátu l a jeho průměr d.

$$l = (1,565 \pm 0,001) \text{ m}$$
$$d = (0,490 \pm 0,005) \text{ mm}$$

Vynulujeme úchylkoměr a postupně přidáváme jednotlivá závaží, která si předtím zvážíme, a zapíšeme si příslušné hodnoty protažení. Takto postupně přidáme 10 závaží a poté je budeme odebírat a dostaneme druhou posloupnost protažení pro stejné zátěže.
Naměřené hodnoty vyneseme do grafu a proložíme jimi lineární funkci, jejíž směrnice bude naše hledané k.



Pro přidávání i odebírání závaží nám vyšel velmi podobný koeficient

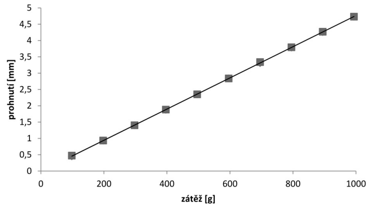
$$k = (426 \pm 9) \cdot 10^{-6} \text{ mkg}^{-1}$$
$$E = (1,91 \pm 0,06) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

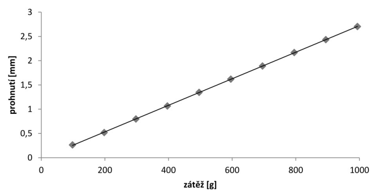
2.2 Průhyb nosníku

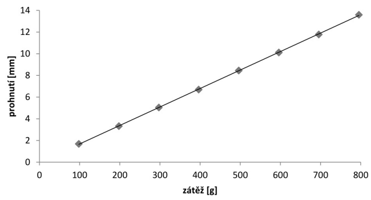
Nejprve změříme vzdálenost podpěr l, tloušťku a a šířku b nosníku.

$$l = (90,0 \pm 0,1)\ \text{cm}$$

Na nosník navlečeme třmen a položíme jej na břity stojanu. Třmen umístíme dopostřed pod úchylkoměr. Ten vynulujeme a opět postupně přidáváme jednotlivá závaží, která si předtím zvážíme, a zapíšeme si příslušné hodnoty prohnutí. Takto učiníme pro tři různé nosníky, pro jeden změříme i pro odebírání závaží. Naměřené hodnoty vyneseme do grafu a proložíme jimi lineární funkci, jejíž směrnice bude naše hledané k.







$$\begin{aligned}
a_1 &= (4,990 \pm 0,005)\ \text{mm} \\
b_1 &= (28,40 \pm 0,02)\ \text{mm} \\
k_1 &= (4780 \pm 5) \cdot 10^{-6}\ \text{mkg}^{-1} \\
E_1 &= (1,060 \pm 0,005) \cdot 10^{11}\ \text{Pa}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= (4,790 \pm 0,005)\ \text{mm} \\
b_2 &= (28,50 \pm 0,02)\ \text{mm} \\
k_2 &= (274 \pm 1) \cdot 10^{-5}\ \text{mkg}^{-1} \\
E_2 &= (2,09 \pm 0,01) \cdot 10^{11}\ \text{Pa}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= (3,950 \pm 0,005)\ \text{mm} \\
b_3 &= (15,00 \pm 0,02)\ \text{mm} \\
k_3 &= (17045 \pm 4) \cdot 10^{-6}\ \text{mkg}^{-1} \\
E_3 &= (1,135 \pm 0,006) \cdot 10^{11}\ \text{Pa}
\end{aligned}$$

2.3 Torzní oscilátor

Nejprve katetometrem změříme délku drátu l, jeho průměr d, průměr zavěšené koule D a odečteme na ní vyraženou hmotnost m.

$$\begin{aligned}
m &= (5905 \pm 5)\ \text{g} \\
D &= (99,0 \pm 0,1)\ \text{mm} \\
d &= (0,98 \pm 0,02)\ \text{mm} \\
l &= (50,7 \pm 0,2)\ \text{cm}
\end{aligned}$$

Poté změříme 10x dobu jeho 10 period.

$10T$[s]
39,68
39,68
39,60
39,65
39,75
39,78
39,62
39,69
39,65
39,87

$$\begin{aligned}
T &= (3,97 \pm 0,01)\ \text{s} \\
G &= (8,1 \pm 2) \cdot 10^{10}\ \text{Pa}
\end{aligned}$$

3 Závěr

Měřením modulu pružnosti v tahu protažením drátu nám vyšel modul odpovídající tažené oceli s tabulkovou hodnotou $1,90$ až $2,15 \cdot 10^{11}$ Pa. Že se jednalo o ocelový drát je pravděpodobné, proto měření můžeme považovat za úspěšné.
Při měření průhybem nosníku jsme změřili tři různé nosníky. První by svým modulem pružnosti odpovídal mosazi s tabulkovou hodnotou $0,90$ až $1,0 \cdot 10^{11}$ Pa, druhý by odpovídal opět odpovídal tažené oceli. U třetího víme, že šlo o uhlíkovový nosník, dle naměřeného modulu pružnosti nejspíše o viskózu, s udávanou hodnotou kolem $1 \cdot 10^{11}$
Torzním oscilátorem jsme dospěli k modulu pružnosti ve smyku, který odpovídá tažené oceli s tabulkovou hodnotou $8,0$ až $8,5 \cdot 10^{10}$ Pa.